



Sebastian Gerber

FUßBALL? NICHTS FÜR JEDERMANN. WER GEWINNT, WER VERLIERT – UND WIE ‚WAHRSCHEINLICH‘ IST DAS?

Digitale Werkzeuge als Unterstützung für den realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Fortbildungsreihe ‚Realitätsbezug im Mathematikunterricht – konkret!‘

22.03.2023

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Sportwetten: Auf ins DFB-Pokal-Halbfinale!



„Der Pokal hat seine eigenen Gesetze!“





Ausgangssituation:



- DFB-Pokal-Viertelfinale am 04.04. und 05.04.2023
- K.O.-Spiel-Modus: die jeweils siegreiche Mannschaft kommt ins Halbfinale
- die Halbfinalspiele werden anschließend aus den vier Siegern ausgelost

DIENSTAG, 04.04.2023

Eintracht Frankfurt  04.04. 18:00  1. FC Union Berlin
Bundesliga Bundesliga

Bayern München  04.04. 20:45  SC Freiburg
Bundesliga Bundesliga

MITTWOCH, 05.04.2023

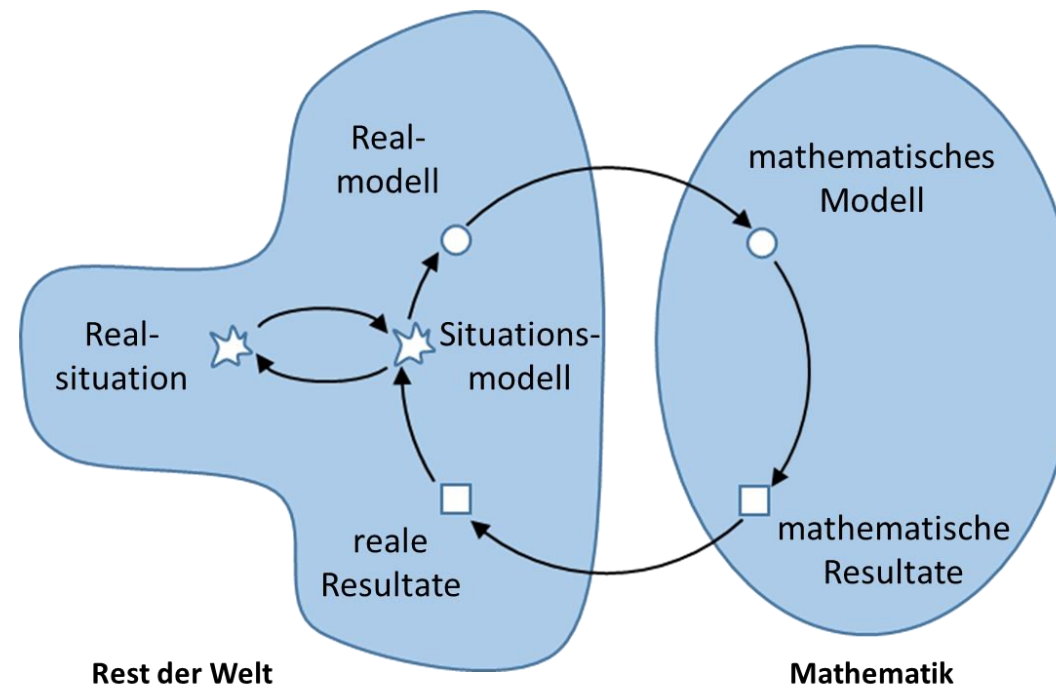
1. FC Nürnberg  05.04. 18:00  VfB Stuttgart
2. Bundesliga Bundesliga

RB Leipzig  05.04. 20:45  Borussia Dortmund
Bundesliga Bundesliga

Mathematisches Modellieren

Mathematisches Modellieren bezeichnet den Lösungsprozess eines außermathematischen Problems mit Hilfe der Mathematik.

(Niss et al., 2007)



Blum & Leiß (2005)

Sportwetten: Auf ins DFB-Pokal-Halbfinale!

... durch digitale Werkzeuge unterstützt

- **Woran erkennt man Favoriten und Underdogs?**
→ Wie lassen sich Wettquoten begründen?
- **Sportwetten – ein faires Spiel?**
→ Wer macht Gewinn? (mit und ohne Erwartungswert)
- **Wie wahrscheinlich ist ein Halbfinale zwischen Eintracht Frankfurt und Bayern München?**
→ (mehrstufige) stochastische Vorgänge betrachten
- **... und ist das realistisch?**
→ Validierung und Nachbereitung nach dem Viertelfinale



ÜBER FAVORITEN UND UNDERDOGS



Was lässt sich aus Wettquoten ablesen?
Wie lassen sich Wettquoten begründen?

Wettquoten für das Viertelfinale

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10

- ... stellen die Wettquoten für einen Sieg (nach 90 Spielminuten, Verlängerung oder Elfmeterschießen) dar.
- ... dienen im Folgenden als Ausgangspunkt für Überlegungen über Siegwahrscheinlichkeiten.
- ... lassen schon Favoriten erkennen.

Wettquoten für das Viertelfinale – Begründung

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10

Aufgabe

Begründe, warum Eintracht Frankfurt eine niedrigere Quote hat als Union Berlin. Recherchiere dafür aktuelle Informationen über die beiden Vereine.

Wettquoten für das Viertelfinale – Begründung

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10

PL.	MANNSCHAFT	SP.	TORE	PKT
1	Dortmund	25	55:31	53
2	Bayern	25	72:27	52
3	Union Berlin	25	38:28	48
4	Freiburg	25	38:34	46
5	RB Leipzig	25	49:30	45
6	Frankfurt	25	46:36	40

Spieldatum	Heim	Weg	Ergebnis
BL - 25. Spieltag So., 19.03.2023	Union Berlin	Frankfurt	2:0
BL - 8. Spieltag Sa., 01.10.2022	Frankfurt	Union Berlin	2:0
BL - 30. Spieltag So., 17.04.2022	Union Berlin	Frankfurt	2:0
BL - 13. Spieltag So., 28.11.2021	Frankfurt	Union Berlin	2:1
BL - 26. Spieltag Sa., 20.03.2021	Frankfurt	Union Berlin	5:2

Eintracht Frankfurt

GESAMT HEIM AUSWÄRTS

→ **V** **U** **U** **V** **V**

2 Punkte ⚽ 4:10

1. FC Union Berlin

GESAMT HEIM AUSWÄRTS

→ **U** **U** **U** **V** **G**

6 Punkte ⚽ 6:7

Trainer Niko Kovac hat die Eintracht 2018 zum DFB-Pokalsieg geführt. Im Interview erklärt er, warum Frankfurt eine typische Pokalmannschaft hat und worauf es vor einem Endspiel ankommt.



ÜBER WETTQUOTEN UND GEWINNER

Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus Wettquoten?

Welche Rolle spielt der Gewinn des Wettbüros?

Sportwetten – ein faires Spiel?

Wettquoten für das Viertelfinale

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

Wettquote $Q_i = \frac{1}{p_i}$ mit $i = 1, 2$

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10

... „verantwortlich“ für die Ausbezahlung, bei korrektem Wett-Tipp

$$\frac{1}{1,70} + \frac{1}{2,10} \approx 1,0644$$

$$\frac{1}{1,13} + \frac{1}{5,70} \approx 1,0604$$

$$\frac{1}{3,10} + \frac{1}{1,35} \approx 1,0633$$

$$\frac{1}{1,70} + \frac{1}{2,10} \approx 1,0644$$

Sportwetten – Nutzung eines (stochastischen) Modells

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10

Gewinn des Anbieters

$$\dots 1 - \frac{1}{\sum p_i}, i=1,2$$

bereinigte Quote (Q_b)

$$\dots Q \cdot \sum p_i, i=1,2$$

ber. Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)

$$\dots \frac{1}{Q_b}$$

DFB-Pokal (Viertelfinale)		Quoten Q		Wahrscheinlichkeiten		1/Summe (Gesamtquote)	Gewinn Anbieter	Gewinnbereinigte Quoten Q_b		Gewinnbereinigte Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)	
		1	2	1	2			1	2	1	2
Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474
Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70	0,8850	0,1754	0,9430	5,70 %	1,20	6,04	0,8346	0,1654
1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35	0,3226	0,7407	0,9404	5,96 %	3,30	1,44	0,3034	0,6966
RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474

Sportwetten – ein (un)fares Spiel?!

Untersuchung des Erwartungswertes für einzelne Partien: $E(X) = 0$?

Vor der Gewinnbereinigung

Tipp: Eintracht Frankfurt gewinnt gegen Union Berlin (umgekehrt äquivalent):

Quote: Frankfurt kommt weiter (nicht gewinnbereinigt)

UNFAIR!



$$E(X) = 0,5526 \cdot (1,7 \cdot 5 \text{ €} - 5 \text{ €}) + 0,4474 \cdot (-5 \text{ €}) \approx -0,30 \text{ €}$$

Wahrscheinlichkeit:
Frankfurt kommt weiter
(gewinnbereinigt)

Wahrscheinlichkeit:
Berlin kommt weiter
(gewinnbereinigt)

[Annahme: Einsatz von 5 €]

DFB-Pokal (Viertelfinale)		Quoten Q		Wahrscheinlichkeiten		1/Summe (Gesamtquote)	Gewinn Anbieter	Gewinnbereinigte Quoten Q _b		Gewinnbereinigte Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)	
Spiele		1	2	1	2			1	2	1	2
Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474

Sportwetten – ein (un)fares Spiel?!

Untersuchung des Erwartungswertes für einzelne Partien: $E(X) = 0$?

Nach der Gewinnbereinigung

Tipp: Eintracht Frankfurt gewinnt gegen Union Berlin (umgekehrt äquivalent):

Quote: Frankfurt kommt weiter (nicht gewinnbereinigt)

FAIR!



$$E(X) = 0,5526 \cdot (1,81 \cdot 5 \text{ €} - 5 \text{ €}) + 0,4474 \cdot (-5 \text{ €}) = 0,00 \text{ €}$$

Wahrscheinlichkeit:
Frankfurt kommt weiter
(gewinnbereinigt)

Wahrscheinlichkeit:
Berlin kommt weiter
(gewinnbereinigt)

[Annahme: Einsatz von 5 €]

DFB-Pokal (Viertelfinale)		Quoten Q		Wahrscheinlichkeiten		1/Summe (Gesamtquote)	Gewinn Anbieter	Gewinnbereinigte Quoten Q _b		Gewinnbereinigte Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)	
Spiele		1	2	1	2			1	2	1	2
Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474

EIN KONKRETES BEISPIEL



Die Viertelfinalspiele als stochastische Vorgänge.

Wie wahrscheinlich ist ein Halbfinale zwischen Eintracht Frankfurt und Bayern München?

Didaktisches Dilemma: reales Problem oder Aufgabe mit Realitätsbezug?

Wettquoten für das Viertelfinale

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10

- ... stellen die Wettquoten für einen Sieg dar.
- ... dienen im Folgenden als Ausgangspunkt für Überlegungen über Siegwahrscheinlichkeiten.
- ... lassen schon Favoriten erkennen.

Fragen: Wie groß ist – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass ...

1. ... **alle vier Favoriten** das Halbfinale erreichen?
2. ... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen?
3. ... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen, **wenn bereits alle vier Favoriten weitergekommen sind?**

Der Halbfinaleinzug als stochastischer Vorgang: Modell

Aufgabe

Notiere vereinfachende Annahmen für die stochastische Situation, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können.

DFB-Pokal (Viertelfinale)		Quoten Q		Wahrscheinlichkeiten		1/Summe (Gesamt- quote)	Gewinn Anbieter	Gewinnbereinigte Quoten Q _b		Gewinnbereinigte Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)	
		1	2	1	2			1	2	1	2
Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474
Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70	0,8850	0,1754	0,9430	5,70 %	1,20	6,04	0,8346	0,1654
1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35	0,3226	0,7407	0,9404	5,96 %	3,30	1,44	0,3034	0,6966
RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474

Der Halbfinaleinzug als stochastischer Vorgang: Modell

allgemeine Modellannahmen, Voraussetzungen, Rahmenbedingungen

- Die **Tordifferenz** ist für das Weiterkommen (natürlich) **irrelevant**: Eine der beiden Mannschaften kommt unabhängig von der Höhe des Sieges weiter.
- Die vier **Viertelfinalpartien** sind (stochastisch) **unabhängig voneinander**.
- Die **Halbfinalpartien** werden ohne Einschränkungen gelöst: Alle Partien sind also **gleichwahrscheinlich**. (insbesondere wird nicht zwischen „Heimmannschaft“ und „Auswärtsmannschaft“ unterschieden).

DFB-Pokal (Viertelfinale)		Quoten Q		Wahrscheinlichkeiten		1/Summe (Gesamtquote)	Gewinn Anbieter	Gewinnbereinigte Quoten Q _b		Gewinnbereinigte Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)	
		1	2	1	2			1	2	1	2
Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474
Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70	0,8850	0,1754	0,9430	5,70 %	1,20	6,04	0,8346	0,1654
1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35	0,3226	0,7407	0,9404	5,96 %	3,30	1,44	0,3034	0,6966
RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10	0,5882	0,4762	0,9395	6,05 %	1,81	2,24	0,5526	0,4474

Frage 1: **Alle vier Favoriten** kommen weiter

Aufgabe

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Favoriten ins Halbfinale einziehen.

Einschätzung S1 (Antwort: zwischen 50 % und 75 %):

„Es sind die besseren Mannschaften, aber der Sieg ist nicht garantiert nur wahrscheinlich.“

Einschätzung S2 (Antwort: ca. 65 %):

„Sie sind zwar die Besten laut Einschätzung, doch es kann auch anders kommen.“

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	gewinnbereinigte WSK: Team 1 kommt weiter	gewinnbereinigte WSK: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	0,5526	0,4474
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	0,8346	0,1654
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	0,3034	0,6966
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	0,5526	0,4474

Frage 1: **Alle vier Favoriten** kommen weiter

P(**Frankfurt** zieht ins Halbfinale ein) = 0,5526

P(**München** zieht ins Halbfinale ein) = 0,8346

P(**Stuttgart** zieht ins Halbfinale ein) = 0,6966

P(**Leipzig** zieht ins Halbfinale ein) = 0,5526

P(alle vier Favoriten kommen weiter)

$$= 0,5526 \cdot 0,8346 \cdot 0,6966 \cdot 0,5526$$

$$\approx \mathbf{0,1775 = 17,75\%}$$

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	gewinnbereinigte WSK: Team 1 kommt weiter	gewinnbereinigte WSK: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	0,5526	0,4474
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	0,8346	0,1654
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	0,3034	0,6966
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	0,5526	0,4474

Frage 1: **Alle vier Favoriten** kommen weiter

P(Frankfurt zieht ins Halbfinale ein)	= 0,5526
P(München zieht ins Halbfinale ein)	= 0,8346
P(Stuttgart zieht ins Halbfinale ein)	= 0,6966
P(Leipzig zieht ins Halbfinale ein)	= 0,5526

$$\begin{aligned}
 &P(\text{alle vier Favoriten kommen weiter}) \\
 &= 0,5526 \cdot 0,8346 \cdot 0,6966 \cdot 0,5526 \\
 &\approx \mathbf{0,1775} = \mathbf{17,75\%}
 \end{aligned}$$

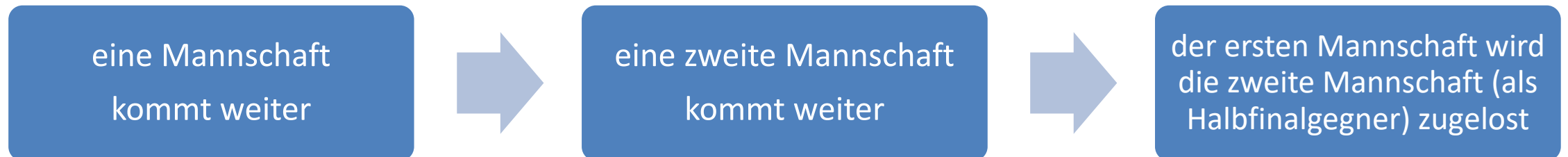
„Zwischen“validierung: Ist das Ergebnis (**17,75 %**) realistisch?

- Die Kombiquote (tipico, Stand 19.03.2023), dass alle vier Favoriten weiterkommen, liegt bei 4,41.
 - ✓ ... entspricht einer (noch nicht gewinnbereinigten) Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4,41} \approx 22,68\%$.
 - ✓ ... die gewinnbereinigte Wahrscheinlichkeit nähert sich $< 20\%$ an.
- Vergleich mit anderen Wahrscheinlichkeiten:
 - ✓ 17,75 % ist die höchste Lostopfwahrscheinlichkeit.
 - ✓ Insb. die niedrigen Siegwahrscheinlichkeiten von Frankfurt und Leipzig verhindern eine Wahrscheinlichkeit (für den Lostopf mit allen vier Favoriten), die nah bei 50% liegt (sie muss also deutlich darunter liegen).

Frage 2: Halbfinale München – Frankfurt (bzw. Frankfurt – München)

allgemein: dreistufiger stochastischer Vorgang

→ 1. Pfadregel



Aufgabe

- *Bestimme – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinandertreffen.*
- *Benenne Bedingungen für ein Halbfinale zwischen Bayern München und Eintracht Frankfurt.*

Frage 2: Halbfinale München – Frankfurt (bzw. Frankfurt – München)

$P(\text{München zieht ins Halbfinale ein}) = 0,8346$



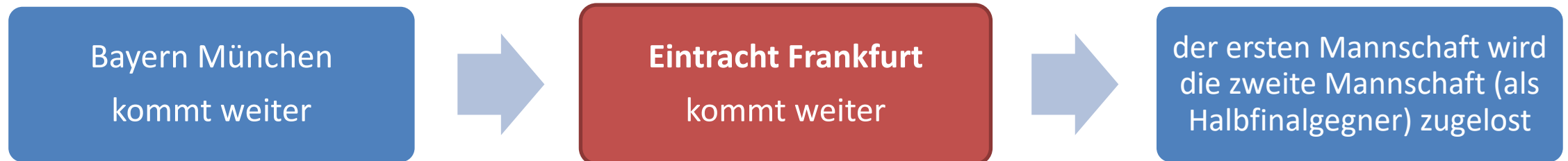
Aufgabe

- *Bestimme – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinandertreffen.*
- *Benenne Bedingungen für ein Halbfinale zwischen Bayern München und Eintracht Frankfurt.*

Frage 2: Halbfinale München – Frankfurt (bzw. Frankfurt – München)

$P(\text{München zieht ins Halbfinale ein}) = 0,8346$

$P(\text{Frankfurt zieht ins Halbfinale ein}) = 0,5526$



Aufgabe

- *Bestimme – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinandertreffen.*
- *Benenne Bedingungen für ein Halbfinale zwischen Bayern München und Eintracht Frankfurt.*

Frage 2: Halbfinale München – Frankfurt (bzw. Frankfurt – München)

$P(\text{München zieht ins Halbfinale ein}) = 0,8346$

$P(\text{Frankfurt zieht ins Halbfinale ein}) = 0,5526$

$P(\text{Halbfinale zwischen München und Frankfurt})$

$$= 0,8346 \cdot 0,5526 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\approx 0,1537$$

Bayern München
kommt weiter



Eintracht Frankfurt
kommt weiter



Bayern München wird
Eintracht Frankfurt (als
Halbfinalgegner) zugelost

Lostopf

Bayern München

Eintracht Frankfurt

Nürnberg/Stuttgart

Leipzig/Dortmund

- drei mögliche Gegner für Bayern München
- alle Lose sind gleichwahrscheinlich
- drei mögliche Halbfinalkombinationen

München – Frankfurt
Nürnberg/Stutt. – Leip./Dortm.

München – Nürnberg/Stutt.
Frankfurt – Leip./Dortm.

München – Leip./Dortm.
Frankfurt – Nürnberg/Stutt.

- die Wahrscheinlichkeit für eine Halbfinalpaarung
zwischen München und Frankfurt: $p = \frac{1}{3}$

Der Unterschied zwischen Frage 2 und Frage 3

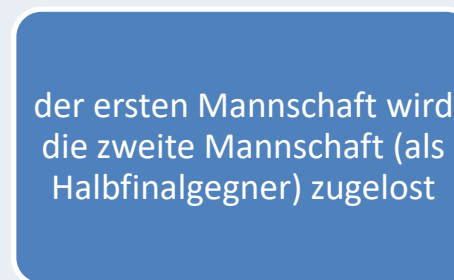
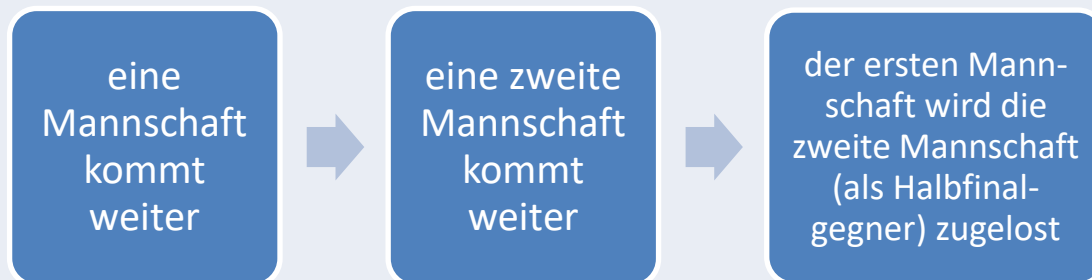
Wie groß ist – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass ...

... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen?

... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen, **wenn bereits alle vier Favoriten weitergekommen sind?**

→ dreistufiger stochastischer Vorgang

→ die ersten beiden Stufen bleiben unbeachtet
→ bedingte Wahrscheinlichkeit



Frage 3 Halbfinale München – Frankfurt (bzw. Frankfurt – München)

$P(\text{München zieht ins Halbfinale ein}) = 0,8346$

$P(\text{Frankfurt zieht ins Halbfinale ein}) = 0,5526$

$$\begin{aligned}
 P(\text{Halbfinale zwischen München und Frankfurt}) &= 0,8346 \cdot 0,5526 \cdot \frac{1}{3} \\
 &= 0,1537
 \end{aligned}$$

Bayern München
kommt weiter

Eintracht Frankfurt
kommt weiter

Bayern München wird
Eintracht Frankfurt (als
Halbfinalgegner) zugelost

Lostopf

Bayern München
Eintracht Frankfurt
Nürnberg/Stuttgart
Leipzig/Dortmund

- drei mögliche Gegner für Bayern München
- alle Lose sind gleichwahrscheinlich
- drei mögliche Halbfinalkombinationen

München – Frankfurt
Nürnberg/Stutt. – Leip./Dortm.

München – Nürnberg/Stutt.
Frankfurt – Leip./Dortm.

München – Leip./Dortm.
Frankfurt – Nürnberg/Stutt.

- die Wahrscheinlichkeit für eine Halbfinalpaarung zwischen München und Frankfurt:

$$p = \frac{1}{3}$$

Wettquoten für das Viertelfinale

DFB-Pokal, Viertelfinale (kein Rückspiel): Wer kommt weiter?

	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	Quote: Team 1 kommt weiter	Quote: Team 2 kommt weiter
Spiel 1	Eintracht Frankfurt	Union Berlin	1,70	2,10
Spiel 2	Bayern München	SC Freiburg	1,13	5,70
Spiel 3	1. FC Nürnberg	VfB Stuttgart	3,10	1,35
Spiel 4	RB Leipzig	Borussia Dortmund	1,70	2,10

Fragen: Wie groß ist – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass ...

1. ... **alle vier Favoriten** das Halbfinale erreichen?
2. ... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen?
3. ... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen, **wenn bereits alle vier Favoriten weitergekommen sind?**

Didaktisches Dilemma:

Zur Beantwortung von Frage 2 wird **der Wert der bedingten Wahrscheinlichkeit aus Frage 3 bereits benötigt!**

Sportwetten: Auf ins DFB-Pokal-Halbfinale!

Didaktisches Dilemma:

- mögliche Lösung:
Frage 2 und Frage 3 werden im Unterricht in vertauschter Reihenfolge behandelt
- Vorteil:
schrittweise Erarbeitung der zentralen Fragestellung: $P(\text{Bedingung}) \rightarrow \text{bedingte Wahrscheinlichkeit} \rightarrow \dots$
- Nachteil:
die ursprüngliche Reihenfolge der Fragen 1 und 2 ist intuitiver; die explizite **Fokussierung** auf die bedingte Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ ist für die Lösung der zentralen Fragestellung nicht zwingend nötig (und eher schulspezifisch)

Fragen: Wie groß ist – auf Grundlage der Wettquoten – die Wahrscheinlichkeit, dass ...

1. ... **alle vier Favoriten** das Halbfinale erreichen?
2. ... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen?
3. ... im Halbfinale Bayern München und Eintracht Frankfurt aufeinander treffen, **wenn bereits alle vier Favoriten weitergekommen sind?**

→ **Wahl: ursprüngliche Reihenfolge**

ZWISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT UND REALITÄT

Sind die Ergebnisse realistisch?

Wie umgehen mit tatsächlichen Spielausgängen?



Interpretationen von Wahrscheinlichkeiten



Aussagen über ein eingetretenes und bekanntes Ergebnis

- nach dem (stochastischen) Vorgang
- Wurden die Erwartungen erfüllt oder eher nicht erfüllt?

Aussagen zum künftigen Eintreten von Ergebnissen

- vor dem (stochastischen) Vorgang
- Wie sicher kann man sein, dass ein bestimmter Ausgang eintritt (in welchem Maß kann man den Ausgang erwarten)?
- Grad der Sicherheit

Rückblick: DFB-Pokal Viertelfinale im 2020

DFB-Pokal (Viertelfinale)		Quoten Q		Gewinnbereinigte Wahrsch.: P(Halbfinaleinzug)	
		1	2	1	2
1. FC Saarbrücken	Fortuna Düsseldorf	2,90	1,40	0,3256	0,6744
Schalke 04	Bayern München	5,00	1,17	0,1896	0,8104
Bayer 04 Leverkusen	Union Berlin	1,22	4,20	0,7749	0,2251
Eintracht Frankfurt	Werder Bremen	1,42	2,80	0,6635	0,3365

- ✓ • Die Favoriten Bayern München, Bayer 04 Leverkusen und Eintracht Frankfurt sind ins Halbfinale eingezogen.
- ✓ • Bayern München und Eintracht Frankfurt wurden sich als Gegner im Halbfinale zugelost ($p = 15,37\%$).

aber:

- ✗ • Wahrscheinlichkeiten sind keine Sicherheiten!
 - Düsseldorfs Halbfinaleinzug war deutlich wahrscheinlicher (67,44%) als Saarbrückens Weiterkommen (32,56%). Saarbrücken setzt sich durch!
 - Es gab wahrscheinlichere Halbfinalpartien als Bayern München gegen Eintracht Frankfurt.

Warum setzt man nicht immer auf den Favoriten?

Beispiel: aktuelle Bundesligasaison
bis Spieltag 25

- Bayern München in allen Spielen bislang Favorit
- **Verlust** bei konsequentem Wetten auf Bayern München: **25,65 €**

Faires Spiel und sicherer Sieg?

Quelle: <https://www.oddsportal.com/football/germany/bundesliga/results/>

Einsatz	5,00 €	Bayern hat gewonnen	1: Team 1 gewinnt
		Bayern spielte unentschieden	0: Unentschieden
		Bayern hat verloren	2: Team 2 gewinnt

Bundesliga (Saison 2022/2023), bis 25. Spieltag			Quoten		
Spiel	Heimmannschaft (Team 1)	Auswärtsmannschaft (Team 2)	1	0	2
1	Eintracht Frankfurt	Bayern München	5,96	5,11	1,49
2	Bayern München	VfL Wolfsburg	1,16	8,97	15,19
3	VfL Bochum	Bayern München	12,82	8,14	1,20
4	Bayern München	Borussia Mönchengladbach	1,19	8,76	12,84
5	1. FC Union Berlin	Bayern München	7,51	5,54	1,39
6	Bayern München	VfB Stuttgart	1,22	7,52	12,00
7	FC Augsburg	Bayern München	14,11	8,39	1,18
8	Bayern München	Bayer 04 Leverkusen	1,37	5,93	7,26
9	Borussia Dortmund	Bayern München	4,19	4,49	1,74
10	Bayern München	SC Freiburg	1,44	5,25	6,57
11	TSG 1899 Hoffenheim	Bayern München	5,17	4,68	1,59
12	Bayern München	1. FSV Mainz 05	1,23	7,21	11,33
13	Hertha BSC	Bayern München	10,32	6,61	1,27
14	Bayern München	Werder Bremen	1,18	8,65	14,43
15	FC Schalke 04	Bayern München	12,17	7,01	1,22
16	RB Leipzig	Bayern München	3,69	4,18	1,91
17	Bayern München	1. FC Köln	1,22	7,62	11,64
18	Bayern München	Eintracht Frankfurt	1,36	5,85	7,75
19	VfL Wolfsburg	Bayern München	5,49	4,57	1,57
20	Bayern München	VfL Bochum	1,14	9,71	17,89
21	Borussia Mönchengladbach	Bayern München	6,91	5,29	1,43
22	Bayern München	1. FC Union Berlin	1,45	4,62	7,64
23	VfB Stuttgart	Bayern München	6,81	4,85	1,46
24	Bayern München	FC Augsburg	1,10	11,09	22,87
25	Bayer 04 Leverkusen	Bayern München	5,02	4,90	1,58

Zusammenfassung

Inhalt	Jahrgangsstufe	mathematischer Hintergrund
Wettquoten analysieren und begründen (Gründe recherchieren)	Unter-/Mittelstufe	Daten analysieren
Wahrscheinlichkeiten bestimmen (Favoriten, Halbfinalpartien)	Mittelstufe	mehrstufige stochastische Vorgänge, Wahrscheinlichkeitsbegriff, Pfadregeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten
(un)fares Spiel	Oberstufe	Erwartungswert



Vielen Dank!

Sebastian Gerber

FUßBALL? NICHTS FÜR JEDERMANN. WER GEWINNT, WER VERLIERT – UND WIE ‚WAHRSCHEINLICH‘ IST DAS?

Digitale Werkzeuge als Unterstützung für den realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Fortbildungsreihe ‚Realitätsbezug im Mathematikunterricht – konkret!‘

22.03.2023

Die Dateien zum Workshop sind beim Referenten erhältlich.

GEFÖRDERT VOM

weiterführende Literatur

Habeck, D., Siller, H.-St. (2017). Die 3-Punkte-Regel bei Fußballturnieren mathematisch analysiert – oder: Warum es wahrscheinlicher ist die Hauptrunde mit 5 Punkten anstatt mit 6 Punkten zu erreichen. In: Stochastik in der Schule. Heft 3, S. 2–7.

Siller, H.-St.; Habeck, D.; Salih, A.; Fefler, W. (2015). Sportwetten und Großereignisse als Chance für den Mathematikunterricht. Praxis der Mathematik in der Schule, Nr. 66, 57. Jg. (Dezember 2015), S. 42–46.

Siller, H.-St., Maaß, M. (2009). Fußball EM mit Sportwetten. In: Brinkmann, A., Oldenburg, R. (Hrsg.). ISTRON-Band 14 (S. 95–112), Franzbecker: Hildesheim.

Siller, H.-St., Maaß, J. (2018). Fußball EM mit Sportwetten. In: Siller, HS., Greefrath, G., Blum, W. (Hrsg.). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Springer Spektrum, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-17599-3_25