

Didaktische Prinzipien

Inhaltsverzeichnis:

1. Spiralprinzip und Orientierung an Leitideen.....	2
2. Lernen Fragen zu stellen oder das Sokratische Prinzip.....	3
3. Problemlösender Unterricht und Genetisches Prinzip	4
4. Inner- und außermathematische Beziehungen herstellen.....	5
5. Produktiv Üben und Wiederholen.....	6
6. Veränderte Leistungsmessung.....	7
7. Das Operative Prinzip	8
8. Das Prinzip der Selbsttätigkeit	9
Literatur:.....	11

Im folgenden möchten wir die *Unterrichtsmethodik* in den Mittelpunkt unserer Überlegungen stellen, wobei wir unter "Methodik" das Teilgebiet der Didaktik verstehen, das Antworten auf Fragen nach der Art und Weise des Unterrichtens, auf Fragen nach dem "Wie" und nach den Wegen zum Erreichen bestimmter Lehr- oder Lernziele sucht. Planung und Beurteilung von Unterricht lässt sich im Rahmen von *Unterrichtsprinzipien* oder *didaktische Prinzipien* durchführen.

In der Pädagogik haben didaktische Regeln, Gesetze oder Prinzipien eine lange Tradition, wenn man etwa an das „Prinzip der Naturgemäßheit“ (COMENIUS) oder das „Prinzip der Anschauung“ (DIESTERWEG) denkt. Unterrichts- oder didaktische Prinzipien sind Regeln für die Gestaltung und Beurteilung von Unterricht, die auf normativen Überlegungen einerseits und auf praktischen Unterrichtserfahrungen andererseits aufbauen. Sie beziehen Ergebnisse der psychologischen Lerntheorie ein und stellen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis verdichtet und verkürzt dar. Unterrichtsprinzipien sind sowohl konstruktive Regeln für die Gestaltung von Unterricht als auch Kriterien für die Analyse und Beurteilung von Unterricht.

In der mathematikdidaktischen Literatur lässt sich eine Vielzahl didaktischer Prinzipien finden.

- Spiralprinzip
- Genetisches Prinzip
- Sokratisches Prinzip
- Exemplarisches Prinzip
- Prinzip des (gelenkten) Entdeckenden Lernens
- Prinzip der Realitätsnähe oder Lebensnähe
- Prinzip der Beziehungshaltigkeit
- Prinzip der integrierten Wiederholung
- Prinzip der Isolation der Schwierigkeiten
- Prinzip der Selbsttätigkeit
- Prinzip der aktiven Lernens
- Operatives Prinzip
- Prinzip der Variation
- Prinzip der adäquaten Visualisierung
- Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel

Die Anwendbarkeit derartiger didaktischer Prinzipien im Unterricht ist stets in Wechselbeziehung zu Zielen, Wissen und Können der Lernenden zu beurteilen. Ferner muss ein Prinzip im Unterricht stets auch in Beziehung und in Abgrenzung zu anderen Prinzipien gesehen werden.

Im folgenden sollen einige didaktische Prinzipien herausgestellt werden, die wir für den Mathematikunterricht als besonders wichtig ansehen.

1. Spiralprinzip und Orientierung an Leitideen

Die Inhalte des Mathematikunterrichts dürfen nicht in unzusammenhängende Gebiete zerfallen, sondern Lernende sollen *Beziehungslinien* oder *rote Fäden* und *Beziehungsnetze* im Mathematiklehrgang erkennen. Derartige *Fundamentale Ideen* sollen den Lernenden eine Orientierung in der Stofffülle einer Wissenschaft geben und die Grundzüge des Fachs unter einem bestimmten Aspekt aufzeigen. Sie orientieren sich an Begriffen oder Aktivitäten des Mathematikunterrichts, wie etwa Algorithmus, Funktion, Linearität, Invarianz, Approximation oder Modellbildung bzw. an Prozesszielen wie Beweisen, Optimieren, Auffinden von Zusammenhängen oder Begriffsbildung (TIETZE u. a.). Der amerikanische Entwicklungs- und Kognitionspsychologe JEROME BRUNER (1915-) geht in seinem Buch „Der Prozess der Erziehung“ von der mittlerweile berühmten Hypothese aus, dass jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form gelehrt werden kann (BRUNER 1970, S. 44). Folglich plädiert er für ein *spiraliges Curriculum*, das die Grundbegriffe auf verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus bis hin zu abstrakten formalisierten Darstellung immer wieder aufgreift. In neuerer Zeit hat sich HEYMANN (1996) ausführlich mit zentralen Ideen für den MU auseinandergesetzt und er möchte anhand dieser Ideen die „Universalität der Mathematik“ (S. 158) und „ihre Bedeutung für die Gesamtkultur“ (ebd.) für den Schüler erfahrbar werden lassen. Er legt einen eigenen Katalog fundamentaler Ideen vor: Idee

- der Zahl,
- des Messens,
- des räumlichen Strukturierens,
- des funktionalen Zusammenhangs,
- des Algorithmus,
- des mathematischen Modellierens.

Mit Blick auf die Schulrealität ist es die entscheidende Frage, wie der Unterricht entlang fundamentaler Ideen, Prinzipien oder Leitlinien auszurichten ist. So lassen sich Lerninhalte „intellektuell ehrlich“ bereits früher im Unterricht verdeutlichen, wie etwa das Lösen von Gleichungen auf verschiedenen Niveaus, das Modellieren von Umweltsituationen oder das Arbeiten mit Funktionen. In der internationalen Untersuchung PISA (Programme in Student Assessment) werden derartige fundamentale Ideen unter dem Begriff „*big ideas*“ zusammengefasst, worunter fachübergreifende mathematische Konzepte gesehen werden, z.B. „Veränderung und Wachstum“, „Raum und Form“ oder „quantitatives Denken“ (BAUMERT u.a. 2001).

2. Lernen Fragen zu stellen oder das Sokratische Prinzip

„Im Grunde gibt es zwei Arten, Mathematik zu unterrichten. Man kann von Antworten ausgehen oder von Fragen.“ (WITTENBERG). Diese — sicherlich grobe — Unterscheidung charakterisiert zwei grundlegende Einstellungen zum Unterrichten, die sich am ehesten mit *darbietendem Lernen* einerseits und *entdeckendem Lernen* andererseits charakterisieren lassen. Es ist sicherlich richtig, dass Antworten nur für denjenigen bedeutsam sind, für den sie Fragen beantworten, für den Antworten das Ergebnis eines Suchens nach Erklärungen oder Lösungen von Problem sind.

Die Beziehung zwischen „Fragen“ und „Antworten“ im Lernprozess wurde immer wieder thematisiert. In einer Rede am 4. 7. 1872 vor der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin ging der Mathematiker E. DU BOIS REYMOND auf diese Problematik ein:

„Dem Lernenden sollen nicht bloß die schon gewonnenen Ergebnisse vorgeführt werden, die beziehungslos ihm entgegnet leicht ohne Sinn und Bedeutung bleiben. Da er die Frage nicht kennt, was kann die Antwort ihm frommen? Da er nicht weiß, was es zu suchen galt, wie kann der Fund ihn interessieren?“

WAGENSCHNEIDER plädiert gar für ein Fragerecht des Schülers, das durch die Einstellung des Lehrers vorgelebt werden muss:

„Viel wichtiger als sein (des Lehrers) Viel-Wissen ist, dass er von einigen Dingen wirklich und sichtlich etwas versteht und dass er da, wo sein Wissen aufhört, Interesse hat, es zu ergänzen. Nicht das Wissen steckt an, sondern das Suchen“.

Für WITTENBERG gehört „das Zustandekommen und die allmähliche Entwicklung der Fragestellungen wesentlich zur Wissenschaft selber“ (1990², S. 60) und „die Echtheit des mathematischen Unterrichts am Gymnasium beginnt also genau dort, wo wirkliche Mathematik ihren Ursprung hat, bei den Fragestellungen.“ (S. 60). WITTENBERG fordert einen Unterricht, der Fragen der Lernenden herausfordert:

„Dann soll man sie doch stellen, diese Fragen! Um so mehr, als ein Kind, dessen natürliche Neugierde nicht durch die Keulenschläge verfrühter und ungerufenen Antworten erschlagen wurde, nicht lieber wünscht, als sich Fragen zu stellen und diese Fragen mit seinen eigenen Mitteln zu erkunden. Und indem eine Frage zu weiteren führt, indem die Antworten, die man entdeckt, neue Fragen aufwerfen, erschließt das forschende Nachdenken unerwartete Situationen und weite Ausblicke in das, was am Anfang geringfügig erscheinen mochte.“ (WITTENBERG 1964, S. 212)

Für den amerikanischen Kritiker der Informationstechnologien NEIL POSTMAN ist Wissen eine organisierte und zweckgerichtete Information und für ihn heißt Erkenntnis, dass man weiß welche Fragen man an das Wissen stellen muss. „Fragen ist das bedeutsamste geistige Werkzeug, das Menschen zur Verfügung steht“ (1999, S. 202).

Das *Sokratische Prinzip* beschreibt einen Unterricht, der am Fragen orientiert ist. Der Name „sokratisch“ geht auf den Menon-Dialog von Sokrates zurück, in dem er einen Sklaven durch fortgesetztes Fragen dahin führt, dass dieser die Frage nach der Seitenlänge eines Quad-

rates doppelter Fläche beantworten kann (vg. <http://www2.rz.hu — berlin.de/cusima/ aufgaben/menontxt.htm>). Unter der *sokratischen Methode* verstehen wir eine Unterrichtsmethode, bei dem der Lehrende durch Fragen den Problemlöseprozess beim Lernenden initiiert und steuert und so dem Lernenden hilft, sich Wissen selbst anzueignen.

Gehen wir davon aus, dass „Erkenntnisse ... jeweils vorläufige, nie endgültige Antworten auf Fragen (sind)“ (S. 94), wie es im Bericht der Bildungskommission von NRW treffend formuliert wird, dann ist in der Tat *Lernen, Fragen zu stellen* ein zentrales Bildungsziel der Schule. Allerdings erfordert „aufschließendes, schrittweise differenzierendes und weiterführendes Fragen Zeit, erfordert Besinnlichkeit, konzentrierte Aufmerksamkeit, ein Sich-Einlassen auf Phänomene...“, (ebd.) Fragen lernen erfordert eine Umgebung der Muße (im ursprünglichen Sinn des Wortes für „Schule“).

3. Problemlösender Unterricht und Genetisches Prinzip

Geht man mit CARL POPPER davon aus, dass Leben Problemlösen ist, so ist damit bereits ein wesentlicher Grund für einen *problemlösenden Unterricht* angesprochen: Lebensvorbereitung erfordert einen Unterricht, in dem auf dem begrenzten und überschaubaren Übungsfeld — hier Mathematik — das Lösen von Problemen gelernt werden kann. Allerdings weiß man heute, dass der wünschenswerte Transfer der in einem Gebiet erlernten Fähigkeiten auf andere Bereiche nicht von selbst geht, sondern eigens erlernt werden muss. Wissen ist an den Kontext gebunden, in dem es erworben wurde und Wissen steht zunächst auch nur bereichsspezifisch im Rahmen *Subjektiver Erfahrungsbereiche* (BAUERSFELD) zur Verfügung. Der Transfer auf andere Gebiete erfordert weiteres Wissen und zusätzliche Fähigkeiten.

Ein weiteres Argument für einen problemlösenden Unterricht ist der Aufbau eines Bildes von Mathematik, in dem Lernende mit mathematischen Begriffen einen Sinn verbinden. Begriffe dürfen nicht leere anschauungslose Objekte sein, sondern Lernende sollen sie als Antworten auf Fragen erkennen, als Lösungen von Problemstellungen, als Hilfsmittel für Problemlösungen und als Ausgangspunkt neuer Fragen und Problemstellungen (VOLLRATH 2001). Lernende sollen eine Vorstellung davon erhalten, warum Begriffe in der Wissenschaft Mathematik und deren Geschichte überhaupt gebildet worden sind. Dieses Suchen nach dem Ursprung und damit auch nach dem Sinn von Begriffen wird vielleicht am schönsten in dem mittlerweile schon berühmten Zitat von OTTO TOEPLITZ ausgedrückt.

"Ich sagte mir: all diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung ... das bestimmte Integral, der Differentialquotient, ... bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen? alle diese Requisiten müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals als sie geschaffen wurden." (1949, V)

Ein Unterricht, der die Begriffsentwicklung im Rahmen der Genese mathematischer Begriffe problematisiert, wird als *historisch-genetischer Unterricht* bezeichnet. Es geht dabei aber nicht um die Geschichte der Mathematik an sich, sondern das Interesse gilt den Fragen und

Problemen, die zu den Begriffen führten, es ist die Art und Weise der Lösungssuche, die Begriffe als Antworten auf Fragen erkennen lässt. Der Sinn von Begriffsbildungen konstituiert sich in der Auseinandersetzung mit Problemstellungen der Wissenschaft Mathematik. Das Einbeziehen von historischen Elementen ist aber nur eine Seite des *genetischen Prinzips*. Die andere Seite betont stärker das Anknüpfen an das Vorverständnis und die Erfahrungswelt der Schüler, das Berücksichtigen von Entwicklungs- und Verständnisstufen beim Schüler und das Entwickeln neuer Lerninhalte auf der Basis dieses Vorwissens, was insbesondere das Eingehen auf lernpsychologische Erkenntnisse erfordert.

Das zentrale Anliegen des *genetischen Prinzips* ist es, dass Mathematik nicht als ein Fertigprodukt gelernt wird, sondern dass Lernende einen Einblick in den *Prozess* der Entstehung von Mathematik erhalten. Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist oder fast ausschließlich nur um Nacherfindungen handelt.

4. Inner- und außermathematische Beziehungen herstellen.

Wir gehen heute davon aus, dass Wissen im Gedächtnis als ein Netzwerk von Begriffen und Beziehungen gespeichert wird, welches bei seiner Aneignung aufgebaut werden muss. Dies ist der kognitionspsychologische Hintergrund des Prinzips vom Lernen in Zusammenhängen oder vom Integrationsprinzip, das ein Lernen von (mathematischen) Begriffen nicht als isolierte Wissens Elemente sondern in Form von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen fordert. Es geht dabei zum einen um innermathematische Beziehungen oder Verknüpfungen, indem Begriffshierarchien auf der Grundlage der mathematischen Fachwissenschaft entwickelt werden und Beziehungen zwischen Begriffen — insbesondere auch zwischen Begriffen aus verschiedenen mathematischen Teilgebieten — hergestellt werden. Neues Wissen erwerben, heißt dann, Eingliedern in und Erweitern der vorhandenen Begriffsnetze. Neue Wissensbereiche können nur auf einem gesicherten Grundlagenwissen aufbauen. Das Aufbauen derartiger Verankerungen und Beziehungen zwischen alten und neuen Inhalten ist global und lokal bedeutsam. In globaler Hinsicht, also den gesamten Mathematiklehrgang betreffend, wird das Entwickeln vertikaler Verknüpfungen in der Expertise der Bund- Länder-Kommission (BLK: http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/gutacht/) als Kumulatives Lernen bezeichnet, was bedeutet, dass für Schüler die Sequenzierung des Lehrstoffs ... nicht in jedem einzelnen Schritt, aber langfristig kohärent sein muss (S. 79) und damit sie erfahren, dass „ihre Kompetenzentwicklung sukzessive voranschreitet“ (ebd.).

Neben diesem innermathematischen Beziehungsnetz liegt ein zentrales Element der Sinnkonstruktion im MU im Aufzeigen der Beziehung der mathematischen Begriffe zur Umwelt der Lernenden. Dies drückt sich in dem vor allem von Freudenthal so hervorgehobenen *Prinzip der Beziehungshaltigkeit* aus, bei dem Lernende erleben sollen, wie man Mathematik in der Umwelt anwenden kann. Hierbei wird nicht nur Mathematik, sondern auch etwas über die zu mathematisierende Situation gelernt:

„Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkt verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das — ich meine die Wirklichkeit — ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt“. (FREUDENTHAL 1973, S. 77)

Das *Prinzip der Beziehungshaltigkeit* hat seine Wurzeln im Prinzip der Realitätsnähe oder Lebensnähe aus der Reformpädagogik. Durch das Aufzeigen von Beziehungen soll Mathematik besser gelernt und länger behalten werden, indem es auf Vorerfahrungen der Lernenden aufbaut, es soll der Sinn mathematischer Begriffe durch Umweltbezug gezeigt werden und schließlich soll im Sinne des fachübergreifendes Lernen der Isolierung der einzelnen Fächer entgegengewirkt werden.

5. Produktiv Üben und Wiederholen

Üben und Wiederholen sind notwendig zur Sicherung und Vertiefung des Gelernten und zur Entwicklung der Fähigkeit, das Gelernte in ähnlichen Situationen anwenden zu können. Üben kann in verschiedenen Formen erfolgen, wie etwa Verständnisübungen, stabilisierendes Üben, operatives Üben, anwendungsorientiertes Üben oder heuristisches Üben (vgl. ZECH, S. 208). Üben darf keine isolierte Tätigkeit sein, sondern muss in die Unterrichtskonzeption eingebunden sein und muss mit Einsicht verbunden sein. Üben muss ferner regelmäßig stattfinden („Prinzip der konsequenten Wiederholung“) und sollte bereits gelernte Dinge immer wieder in neuen Kontexten aufgreifen („Prinzip der integrierten Wiederholung“). Damit ein Schema erlernt und verfügbar bleibt — es also ein stabiles Wissensselement wird —, muss es in herausfordernden und anregenden Kontexten immer wieder geübt werden („Prinzip der Stabilisierung“).

In den letzten Jahrzehnten wurde wiederholt ein Abgehen von kleinschrittig konstruierten Aufgabenplantagen und ein Zuwenden zum Üben als einer sinnvermittelnden Tätigkeit gefordert (WITTMANN 1990, WINTER 1984). Die Begründung dafür liegt darin, dass stereotypes Üben nicht auf Fehlerursachen eingeht, dass dem Schüler keine konstruktiven Hilfen geboten werden und Verfestigung von Denkfehlern eintreten können. Einem kleinschrittigen Lernen und Üben setzen WITTMANN u. MÜLLER im Rahmen des „aktiv entdeckenden Lernen“ das „produktive Üben“ gegenüber, bei dem Lernabschnitte großzügiger bemessen sind, Aufgaben aus Sinnzusammenhänge entwickelt werden, und den Lernenden Denkleistungen abverlangt werden, die die Eigenverantwortlichkeit für das Lernen fördern. Sinnvolles Üben trägt zur Festigung des Gelernten bei und orientiert sich an dem, was später tatsächlich einmal gebraucht wird. Von Üben sprechen MÜLLER und WITTMANN, „wenn ein Satz von Wissensselementen oder eine Fertigkeit anhand einer **größeren** Zahl **gleichartiger** Aufgaben geübt wird“ (S. 177). Ziel muss es sein, Üben als integrierenden Bestandteil in den Unterrichtsaufbau zu sehen.

Im Zusammenhang mit Üben hat sich in letzter Zeit und vor allem im Zusammenhang mit den TIMSS-Ergebnissen der Begriff *Aufgabenkultur* eingebürgert, weshalb der 1. Themenbereich im BLK-Modellversuch auch „Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im math.-naturw. Unterricht“ heißt. Dabei geht es vor allem um Aufgaben — sog. „offene“ Aufgaben — die mehrere Herangehensweisen und Lösungswege erlauben. Eine Möglichkeit, offene Aufgaben zu erhalten ist es dabei „Aufgaben zu öffnen“, was bedeutet, Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht weiter zu fassen, aber auch Lernende zu öffnen für eine neue Sichtweise von Mathematik und schließlich Fragestellungen und Lösungswege zu öffnen, zu erweitern und zu verallgemeinern. Viele Beispiele für solche Aufgaben finden sich in der Rubrik „Die etwas andere Aufgabe“ der Zeitschrift *Mathematiklehren* in der Zusammenstellung von Aufgaben aus der Zeitung in HERGET u. SCHOLZ (1998) oder in SCHUPP (2002).

6. Veränderte Leistungsmessung

Eine veränderte Aufgabenkultur muss sich auch auf die Aufgabenstellungen in Leistungskontrollen und die gesamte Art der Leistungsmessung auswirken. Einen Schritt in Richtung veränderte Leistungsmessung gehen die amerikanischen NCTM-Assessment-Standards von 1995. „Assessment“ lässt sich hier nur sehr unzureichend mit „Leistungsmessung“ übersetzen und bedeutet vielmehr und vor allem, Lernende einschätzen lernen, ihr Verstehen und ihre Fähigkeiten beurteilen und sie für das weitere Lernen motivieren zu können.

“Assessment procedures must no longer be used to deny students the opportunity to learn important mathematics. Instead, assessment should be a means of fostering growth toward high expectations. To do otherwise represents a waste of human potential.”
(NCTM, Assessment Standards, S. 1)

Der Leitspruch dieser Schrift ist, dass Leistungsbewertung das messen sollte, was Kinder können und nicht das, was sie nicht können. Dabei wird insbesondere die Forderung nach einer größeren Variationsbreite der Leistungsmessung erhoben, was wiederum in unmittelbarem Zusammenhang mit einer angestrebten neuen Unterrichtskultur zu sehen ist:

“The recognition that the mathematical community needs fundamental changes in assessment methods at all grade levels derives from an increased understanding of what it means to think mathematically — the kind of research — based understanding that produced the refined goals for instruction reflected in the NCTM *Standards* ... “
(SCHOENFELD, S. 13).

Leistungsmessung wird als ein Prozess angesehen, der den gesamten Unterricht begleitet und der insbesondere auch den „Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen“ (BLK – Modul 5) soll.

In der amerikanischen Literatur finden sich mittlerweile viele erprobte Vorschläge für eine veränderte Leistungsbewertung, etwa in „Measuring Up“ vom MSEB¹ und NRC², das sog

¹ MSEB = Mathematical Science Education Board

'Prototypen' der Leistungsbewertung für die 4. Grundschulklasse vorstellt oder „Student Assessment in Calculus“ (1997) von ALAN SCHOENFELD, in dem Möglichkeiten für Projektunterricht und das Anfertigen von Portfolios aufgezeigt werden. Derartige Schriften trugen auch dazu bei, die Vielfalt an Leistungsbewertungen in den Schulen der USA zu erhöhen. Tests mit „offenen Büchern“, 5 – Minuten – Vorträge, Gruppenarbeit, Arbeiten an „Open – ended problems“. Schließlich erfolgt auch bei den überregionalen Tests ein Abgehen von den traditionell fast ausschließlich verwendeten Multiple Choice Tests. Siehe auch das Heft Nr. 107 der Zeitschrift MATHEMATIKLEHREN (Aug. 2001).

7. Das Operative Prinzip

Es war das zentrale Ziel der Überlegungen des Entwicklungspsychologen JEAN PIAGET (1896 – 1980), die Genese von Wissen in den Wissenschaften und beim Menschen zu erklären. Nach seiner genetischen Erkenntnistheorie entwickelt sich die Intelligenz etappen-, stufen- oder stadienweise in Wechselwirkung zwischen Mensch und Umwelt, wobei sich Denken in Form von flexiblen Systemen, Mustern oder „kognitiven Schemata“ ausbildet, die die Aktivitäten des Einzelnen steuern.³ Ausgangspunkt der kindlichen Denkentwicklung sind dabei zunächst an konkreten Objekten vorgenommene reale Handlungen, die durch an Bildern, Zeichen und Symbolen vorgenommene Handlungen erweitert werden, und die sich schließlich über einen Verinnerlichungsprozess als von konkreten Erfahrungen gelöste abstrakte oder formale Handlungen als die eigentlichen Denkopoperationen ausbilden. PIAGET führt Denken auf menschliche Handlungen zurück: Denken ist verinnerlichtes oder gedachtes Handeln. Kennzeichnend für diese verinnerlichten Handlungen oder — wie PIAGET sie nennt — „Operationen“ sind ihre Flexibilität oder Beweglichkeit, d. h. sie sind umkehrbar oder reversibel (*Reversibilität*), zusammensetzbar oder kompositionsfähig (*Kompositionsfähigkeit*) sowie assoziativ (*Assoziativität*), d. h. man kann auf verschiedenen Weisen zum Ziel kommen.

Während PIAGET die stufenweise Entwicklung der menschlichen Intelligenz als weitgehend konstant und altersspezifisch ansieht, stellt AEBLI – ein Schüler PIAGETS – stärker die Bedeutung der Erziehungsbedingungen und damit auch die Bedeutung von Unterricht für die Intelligenzentwicklung heraus. Für ihn vollzieht sich die Verinnerlichung einer Operation in drei Hauptstufen (AEBLI 1961, S. 102): Ausgehend von der *konkreten Stufe* und dem Arbeiten mit konkreten Gegenständen und Material, wird auf der *figuralen Stufe* mit bildlich dargestellten Gegenständen operiert und auf der *symbolischen Stufe* werden Gegenstände und Operationen durch Zeichen repräsentiert. Entscheidend für den Stufenübergang ist dabei zum einen das *Reflektieren über die eigene Tätigkeit* oder die *Verbalisierung der Handlungen* und zum anderen das *operative Durcharbeiten oder Üben* der entsprechenden Inhalte. Darunter versteht er ein variables, sinnbezogenes Üben, das die Reversibilität, Kompositionsfähigkeit und

² NRC = National Research Council

³ Eine Einführung in die Erkenntnistheorie Piaget's findet sich in Wittmann 1981⁶, S. 59ff

Assoziativität zu entwickeln sucht. Mit dem *operativen Durcharbeiten* sind vielfältige systematische Veränderungen verbunden: Veränderung der Ausgangssituation, Suche nach alternativen Lösungswegen, Variieren der gesuchten Größen, Variation des Unwesentlichen, d. h. Variieren der Größen die keinen Einfluss auf die betrachteten Zusammenhänge haben.

Entscheidend für die Denkentwicklung sind die an konkreten, bildlichen und symbolischen Gegenständen ausgeführten Aktivitäten und Handlungen. Der Wissenserwerb erfolgt nicht durch Betrachten oder einfaches Nachahmen („Mathematik ist kein Zuschauersport“), sondern das Operieren mit Objekten. *Konkretes Handeln, zeichnerisches Handeln* und *Handeln in der Vorstellung* sind die *Stufen des Verinnerlichungsprozesses*. „Das operative Prinzip leitet einen Unterricht, der das Denken im Rahmen des Handelns weckt, es als ein System von Operativen aufbaut und es schließlich wieder in den Dienst des praktischen Handelns stellt.“ (AEBLI) Dieses ist die Grundannahme des operativen Prinzips, das AEBLI in die allgemeine Didaktik eingeführt hat.⁴

Von den Stufen der Verinnerlichungsprozesses sind die *Darstellungsweisen* oder *Repräsentationsmodi* des Wissens und Könnens nach J. BRUNER zu unterscheiden: die enaktive Form (Darstellung durch eine Handlung), die ikonische Form (Darstellung durch bildliche Mittel) und die symbolische Form (Darstellung durch Sprache und Zeichen). Man spricht auch vom EIS-Prinzip. Dabei handelt es sich nicht – im Unterschied zu den Stufen der Verinnerlichung nach AEBLI – um nacheinander zu durchlaufende Stufen, sondern es sind vielmehr Darstellungsweisen, die wechselseitig aufeinander bezogen sind.

8. Das Prinzip der Selbsttätigkeit

Viele sog. schülerorientierte Arbeitsformen wie problemlösender, entdeckender, Projekt – oder offener Unterricht setzen Eigenaktivitäten oder Selbsttätigkeit des Lernenden voraus.⁵ Mit einem auf Selbsttätigkeit aufbauenden Unterricht sind Ziele wie Entwicklung von Selbstständigkeit, kritisches Reflektieren der eigenen Tätigkeit und Motivation durch eigenen Erfolg verbunden. Insbesondere sollten Verständnisfehler produktiv genutzt werden, zum einen um die Ursachen von Fehlerquellen aufzuspüren, zum anderen um durch das Aufzeigen von Konsequenzen aus fehlerhaften Überlegungen bewusst die Widersprüche zu mathematischen Gesetzmöglichkeiten deutlich werden zu lassen.

Nun war Selbsttätigkeit schon häufig eine zentrale Forderung bei Lern- und Bildungsprozessen. So forderte bereits JEAN JACQUE ROUSSEAU Bildung durch „eigene Erfahrung“ des Kindes, JOHANN GOTTFRIED HERDER (1744–1803) fordert die Eigentätigkeit des Kindes bei Erziehung und Unterricht, JOH. GOTTLIEB FICHTE (1762–814) sieht alles Denken und Erken-

⁴ Zumindest im Ansatz erinnert dies an ein altes chinesisches Sprichwort. Ich höre, und ich vergesse — Ich sehe, und ich erinnere mich — ich tue es, und ich verstehe!

⁵ Ausgehend von einer konstruktivistischen Sichtweise ist Selbsttätigkeit gar die notwendige Voraussetzung für jeglichen Wissenserwerb, da alle Sinneseindrücke letztlich mentale Konstruktionen sind. Gegenüber diesem weiten Begriffsverständnis wollen wir hier aber den Begriff enger eingrenzen.

nen als „Handeln“ an und betont deshalb die Selbsttätigkeit, bei JOHANN HEINRICH PESTALOZZI (1746–1827) werden Anschauung und Selbsttätigkeit zu den beiden grundlegenden Prinzipien von Unterricht und Fröbel stellt die Selbsttätigkeit in den Mittelpunkt der Erziehung (vgl. REBLE 1999¹⁹). Dann baut die Reformpädagogik und insbesondere die Arbeitsschulbewegung auf dem Prinzip der Selbsttätigkeit auf. So ist für JOHN DEWEY (1859–1952) das selbständige Denken und Handeln Grundlage allen Lernens, für KERSCHENSTEINER hat das selbständige Erarbeiten zentrale Bedeutung für die Bildung des Menschen (S. 293) und bei HUGO GAUDIG (1860–1923) wird die Selbsttätigkeit zum zentralen Prinzip für alle Unterrichtsfächer.

„In dieser Arbeitsschule soll der Schüler während der gesamten Arbeitsvorgänge selbsttätig sein, selbsttätig beim Zielsetzen, selbsttätig beim Ordnen des Arbeitsganges, selbsttätig bei der Fortbewegung zum Ziel, selbsttätig bei den Entscheidungen an den Kreuzwegen, selbsttätig bei der Kontrolle, bei der Korrektur usw.“ (1911 auf dem Kongress für Jugendbildung und Jugendkunde, zit. nach REBLE S. 298).

Für *Selbsttätigkeit im Mathematikunterricht* hat sich zu Beginn dieses Jahrhunderts vor allem JOHANNES KÜHNEL eingesetzt, indem er „Lernorganisation statt direkter Lernsteuerung“ fordert und in neuerer Zeit haben WINTER und MÜLLER u. WITTMANN die Idee der Selbsttätigkeit im Rahmen des „aktiv entdeckenden Lernens“ genauer ausgestaltet, an vielen Beispielen erläutert, und sich mit häufig im Rahmen dieses Konzepts angeführten Nachteile (höherer Zeitaufwand, Verlust von Kontrolle, Benachteiligung schwächerer Schüler) kritisch auseinandergesetzt.

Trotz dieser weit zurückreichenden Verankerung dieses Prinzips in der Geschichte der Pädagogik und Mathematikdidaktik blieb die Bedeutung dieses Prinzips für den realen Mathematikunterricht gering. So stellt bereits HUGO GAUDIG im Jahre 1911 fest, dass zwar „Selbsttätigkeit“ wohl das meistgebrauchteste Schlagwort der damaligen Zeit war, dass aber „von den Taten, die dieses Wort fordert, ... nicht allzu viel in der deutschen Schule“ zu spüren sei (FÜHRER, S. 219). Nun hängt die Beurteilung der Wirkung dieses Prinzips im Unterricht vor allem davon ab, was man unter dem Begriff *Selbsttätigkeit* versteht.

Wir gehen davon aus, dass Selbsttätigkeit eine geplante zielorientierte Aktivität ist. Sie setzt also ein anzustrebendes Ziel und Freiräume für das Denken und Handeln voraus, die das Planen, Ausführen und Kontrollieren von Aktivitäten betreffen. Selbsttätigkeit ist etwas anderes als zielloses Hantieren oder unproduktiver Aktionismus. So ist das systematische Variieren zum Erkunden von Zusammenhängen eine wichtige selbsttätige Lösungsstrategien, sie kann aber auch zu einem planlosen "Versuch-und-Irrtum-Strategie werden, bei der nur zufällig Lösungen entdeckt werden, ohne dass eine Einsicht in die Problemzusammenhänge erfolgt, was dann nicht mehr unter den Begriff „selbsttätig“ fallen würde.

Neben dieser Abgrenzung des Begriffs müssen aber auch die Grenzen des Prinzips der Selbsttätigkeit erkannt werden. Selbstständiges Lernen setzt Wissen voraus und es ist schlichtweg nicht möglich, alle im Mathematikunterricht zu vermittelnden Inhalte, die sich im

Laufe einer mehrtausendjährigen Geschichte angesammelt haben, alles selbständig und selbsttätig erarbeiten zu wollen.

Literatur

- AEBLI, H., Zwölf Grundformen des Lehrens, Stuttgart 2001¹¹
- BAUER, L., Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen. Didaktisch-methodische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Grundschule. ZDM 25 (1993), 76 – 83
- BAUMERT, J. u.a.(Hrsg.), PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich, Opladen 2001
- BILDUNGSKOMMISSION NRW, Zukunft der Bildung – Schule der Zukunft, Luchterhand, Neuwied u. a. 1995
- BLK – Bund-Länder-Kommission, Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch — naturwissenschaftlichen Unterricht“
http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/gutacht/, November 1997
- BRUNER, J. S., Der Prozess der Erziehung, Berlin Verlag, Berlin 1970
- FREUDENTHAL, H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1, Klett Verlag, Stuttgart 1973
- FÜHRER, L., Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen, Vieweg, Wiesbaden 1997
- HEYMANN, H. W., Allgemeinbildung und Mathematik. Beltz, Weinheim 1996
- POSTMANN, N., Wir amüsieren uns zu Tode, 1999
- REBLE, A., Geschichte der Pädagogik, Klett, Stuttgart 1999¹⁹
- SCHOENFELD, A., Student Assessment in Calculus, 1977
- SCHUPP, H., Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Hildesheim 2002
- TIETZE, U., KLIKA, M., WOLPERS, H., Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1. Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis, Vieweg, Braunschweig 2000²
- TOEPLITZ, O., Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Springer-Verlag, Berlin 1949
- VOLLRATH, H.-J., Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, 2001
- WINTER, H., Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, Math. Lehren (Feb 1984), H. 2, 4 –16
- WITTENBERG, A.I., Bildung und Mathematik Klett, Stuttgart 1990²
- WITTMANN, E. C., MÜLLER, G. N., Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins, Klett, Stuttgart 1990
- WITTMANN, E. Chr., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg Verlag, Braunschweig u. Wiesbaden 1981⁶
- ZECH, F., Grundkurs Mathematikdidaktik, Beltz Verlag, Weinheim u. Basel 1996⁸